

國立臺北教育大學 101 學年度碩士班招生入學考試

數學暨資訊教育學系數學教育碩士班 基礎數學 科試題

普通數學

1. 求證：在 11, 111, 1111, 11111, \dots 中，任何一個數都不是自然數的平方。
(10 分)
2. 有一數列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots ，從第三個數開始，每個數都是前兩個數的和。問在前 100 個數中，有幾個是偶數？(10 分)

微積分

3. 每小題各 5 分，共 25 分

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(3) 試證： $x^3 + 3x = 2$ 在 (0,1) 內有實根

(4) 試求極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

(5) 試求積分 $\int \sin(\ln x) dx$

4. 某一苗圃將某種灌木培育 6 年後出售，該灌木的生長速率為

$$\frac{dh}{dt} = 2t + 4$$

其中 t 為年數，當灌木 12 公分高時植入花盆(當 $t=0$ 時， $h=12$)

- (1) 試求 t 年後的高度 h 。(5 分)
- (2) 灌木出售時的高度為何？(5 分)

5. 利用二重積分求由 $y = x^2$ 與 $x + y - 2 = 0$ 所圍成之面積。(10 分)

線性代數

6. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $A^{-1} = ?$ (10 分)

7. 請詳細說明 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 和 $A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 為線性相依還是線性獨立。(5 分)

8. 令 $S_1 = \{(1,0,0), (1,1,0)\}$, $S_2 = \{(1,0,1), (1,1,1)\}$, $W_1 = \text{span}(S_1)$ and $W_2 = \text{span}(S_2)$

(1) 求 $W_1 \cap W_2$ 的基底。

(2) 求 $W_1 + W_2$ 的基底。

(10 分)

9. A 、 B 為可交換，即 $AB=BA$ ，若 X 為 A 之特徵向量，則 BX 亦為 A 之特徵向量，試證之。(10 分)