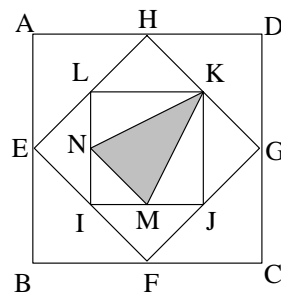


# 國立臺北教育大學 100 學年度碩士班招生入學考試

## 數學暨資訊教育學系數學教育碩士班 基礎數學 科試題

### 普通數學

1. 任給一個二位數，我們進行以下的操作：將此數之個位數字乘以 3，再加上此數之十位數字，將所得到的結果記為下一個數。然後將得到的這個新數再重複做以上的操作得到第三個。依此方式繼續下去，得到一串數。(例如這串數可以是 18, 25, 17, 22, 8, ……)。如果我們給定的第一個數是 15。試問此串數列的第 2012 項是多少？(10 分)
2. 有 8 把鎖和 10 把鑰匙，其中 10 把鑰匙中的 8 把是和 8 把鎖一一配對的。但現在鎖和鑰匙弄亂了。問：至少需要試多少次，才能確保把鎖和鑰匙都配對起來？(10 分)
3. 在下面的圖形中，ABCD 是一個邊長為 1cm 的正方形。E, F, G, H 是它的各邊的中點。I, J, K, L 是圖形 EFGH 的各邊中點。M 和 N 分別是邊 IJ 和 LI 的中點。求  $\triangle KMN$  的面積。(10 分)



### 微積分

4. 求下列極限值及積分值(每小題各 5 分，共 20 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3x - |x|}{x} \right) = ?$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + \sin x}{2x} \right) = ?$$

$$(3) \int \frac{1}{x(\ln x)} dx = ?$$

$$(4) \int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} dx = ?$$

5. 若  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ x^2 & x \notin Q \end{cases}$ ，試證： $f(x)$  在 0 點可微 (10 分)

6. 試證，若  $f(x)$  在  $x \in [1, \infty]$  為一個非負之連續遞減函數，且  $a_n = f(n)$ ，則  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  與  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  同時收斂或同時發散。(10 分)

線性代數

7. If  $A$  is a real symmetric matrix satisfying  $A^k = I$  for some  $k \geq 1$ , prove that  $A^2 = I$ . (10 分)

8. 若  $A$  是對稱方陣，試證其不同特徵值所對應之特徵向量，兩兩是互相正交(orthogonal)。(10 分)

9. 若  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  求其特徵值，特徵向量，並寫出對角化過程。

(10 分)