

國立臺北教育大學 99 學年度碩士班招生入學考試  
數學暨資訊教育學系(含數學教育碩士班) 基礎數學 科試題

微積分

1. 設  $p > 0$  ,  $q > 0$  ,  $p + q = 1$  。若  $f''(x) > 0$  ,  $\forall x \in \mathbf{R}$  , 試證

$$f(px_1 + qx_2) < pf(x_1) + qf(x_2) , \text{ 對所有 } x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in \mathbf{R}) \text{ 均成立。}$$

(10 分)

2. 設  $x > 0$  , 試證 :  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$  。(10 分)

3. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上連續且遞增, 求證 :  $\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$  。

(10 分)

4. 已知  $f(x)$  函數在  $t \in (h_1(x), h_2(x))$  連續且可微

(a) 試證  $\frac{d}{dx} \left[ \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t) dt \right] = f(h_2(x))h_2'(x) - f(h_1(x))h_1'(x)$

(b) 若已知使用上題(a)求  $\frac{d}{dx} \left[ \int_{3x+1}^{3x+5} e^{t^2} dt \right] = ?$

(共 10 分)

5. 求由  $y = x^3 + x + 1, x = 1, y = 1$  此三個方程式所包圍區域繞直線  $x = 2$  旋轉後之旋轉體之體積。(10 分)。

線性代數

6. Let  $\delta$  be a determinant on  $M_{n \times n}(F)$ , and let  $A \in M_{n \times n}(F)$ .

Then the following conditions are equivalent

(a)  $\delta(A) = 0$

(b)  $A$  is not invertible

(c)  $\text{rank}(A) < n$

(共 10 分)

7. Let  $V$  be an inner product space. Show that for all  $x, y \in V$  and  $c \in F$ , we have  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ . (10 分)

8. 已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(a) 求  $A$  矩陣之特徵向量。

(b) 寫出  $A$  矩陣對角化過程(Diagonalized Process)。

(共 10 分)

9. 已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 求  $e^A = ?$  (10 分)

普通數學

10. 至少畫出十種正方體之平面展開圖。(10 分)