

國立臺北教育大學 98 學年度碩士班招生入學考試  
數學教育研究所 基礎數學 科試題

一、微積分

1. 計算  $\int_0^1 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_{n-1}} (x_1 x_2 \cdots x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$  之值。(10 分)

2. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!}$  (10 分)

3. 求  $\int x \sin x \cos x dx$  (10 分)

4.  $f: R \rightarrow R$ , 且  $\exists M > 0, \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| < M$ 。試證  $f(x)$  在  $x = c$  處連續。(10 分)

5. 證明若方程式  $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x = 0$  有一個正根  $r$ , 則方程式

$nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + a_2(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} = 0$  必有一個小於  $r$  的正根。(10 分)

二、線性代數

6. 令矩陣  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a$  為不等於 0 之複數, 證明  $A$  不能被對角化。(7 分)

7. 令  $T: R^3 \rightarrow R^2$  為  $T(x, y, z) = (x - y, 2z)$ , 求  $T$  的核空間(null space)和值域(image)。(10 分)

8. 求  $(1,1,1)$  在由  $(1,0,0)$  和  $(1,0,-1)$  所生平面上的正交投影向量(orthogonal projection vector)。(10 分)

9.  $L: R^2 \rightarrow R^2$  為線性映射,  $L(x, y) = (x + y, x - y)$ , 證明  $L$  可逆。(8 分)

10. 設  $V$  為從  $R$  映至  $R$  所有函數所成的空間；設  $V_e$  為所有偶函數  $f(-x) = f(x)$  所成的集合；設  $V_o$  為所有奇函數  $f(-x) = -f(x)$  所成的集合。試證

(a)  $V_e$  和  $V_o$  為  $V$  的子空間。

(b)  $V_e + V_o = V$

(c)  $V_e \cap V_o = \{0\}$

(15 分)