

國立臺北教育大學 97 學年度碩士班招生入學考試
數學教育研究所 基礎數學 科試題

一、求下列極限 (10 分, 每題 5 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|+3x}{2x} = ?$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+\sin x}{x} = ?$

二、求下列積分 (10 分, 每題 5 分)

(1) $\int \sec^3 x dx = ?$ (2) $\int \frac{\sin x}{(\cos x)(\cos x - 1)} dx = ?$

三、已知 $f(x)$ & $g(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 連續, 在 $x \in (a, b)$ 可微

試證存在 $c \in (a, b)$ 使得 $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ (10 分)

四、求出介於 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $x = \frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{5\pi}{4}$ 所圍成區域的面積。
(10 分)

五、求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = ?$ (10 分)

六、已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

(1) 求 A 之特徵值

(2) 求 A 之特徵向量

(3) 求 A 之逆矩陣

(4) 計算 $A^5 - 8A^4 + 19A^3 - 23A^2 + 16A - 5I = ?$

(20 分，每題 5 分)

七、已知 $v_1 = [1, 1, 1], v_2 = [0, 1, 1], v_3 = [0, 0, 1]$ 為 R^3 之一組基底，利用 Gram-Schmidt 正交化(Orthogonal Process)建構一組正交單位化(orthonormal)基底。(10 分)

八、設 $T: R^3 \rightarrow R^3$ 定義為 $T(x, y, z) = (x + 3y + 4z, 3x + 4y + 7z, -2x + 2y)$

(1) 試證 $\text{Ker}(T)$ 是一條通過原點的直線。

(2) 試證 $T(R^3)$ 是通過原點的平面。

(10 分，每題 5 分)

九、令 $V = M_{2 \times 2}(R)$ ， $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a, b, c \in R \right\}$ ， $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \in V \mid a, b \in R \right\}$ 試求

$\dim W_2$ ， $\dim(W_1 + W_2)$ 。(10 分，每題 5 分)