國立臺北教育大學98學年度學士班轉學考試

學系（組）：數學暨資訊教育學系（數學組）

年　　級：三年級

科　　目：代數

【每題10分，共100分】

1、檢查下列代數結構是否為（交換）半群、（交換）群？

（Q , * ）， $a*b=a+b-a\cdot b \quad \forall a,b\in Q$

2、若 G 為交換群， $a,b\in G$ ，則 $(ab)^n=a^n b^n \quad \forall n\in Z$

3、若 G 為群，且其秩（order）為偶數，試證 $\exists a\neq e$ ， $a\in G \ni a^2=e$

4、設 $a,b\in G$ ，且 $a^5=e$ ， $aba^{-1}=b^2$ ，求 $\circ(b)$

5、設 $\phi: G\to G'$ 為群同態（homomorphism），則 ϕ 為嵌射（monomorphism）

$\Leftrightarrow \ker\phi=\{e\}$

6、Let G be a finite group and a be any element of G. Show that $<a>$ is a subgroup of G, where < a > denotes the set $\{a^n \mid n\in Z\}$.

7、If G has no proper subgroups, prove that G is cyclic.

8、Let $C(a)$ denote the centralizer of a in G. If G is a group and $a,x\in G$, prove that $C(x^{-1}ax)=x^{-1}C(a)x$.

9、Show that Z_p, the integers modulo the prime p, is a field.

10、 Let R be a commutative ring with unit whose only ideals are (0) and itself. Show that R is a field.