

國立臺北教育大學 98 學年度學士班轉學考試

學系 (組): 數學暨資訊教育學系 (數學組)

年 級: 二年級

科 目: 線性代數

1. W_1, W_2 均為向量空間 V 之子空間, $\dim(W_1) = m$, $\dim(W_2) = n$, 且 $m > n$ 。

求證 $\dim(W_1 \cap W_2) \leq n$ 且 $\dim(W_1 + W_2) \leq m + n$ 。(10%)

2. 若 U_1, U_2 相互線性獨立, 且 $W_1 = aU_1 + bU_2$, $W_2 = cU_1 + dU_2$, 試証:

$ad \neq bc \Leftrightarrow W_1, W_2$ 相互線性獨立。(10%)

3. 令 V 是由三個函數 $f(x) = 1$, $g(t) = t$, $h(t) = t^2$ 所生成的子空間, 求對

V 的一組正規直交基底。(10%)

4. 令 A, B 是 R^n 中兩個線性獨立向量, 求同時垂直 A 與 B 之空間的維數。

(10%)

5. $L: R^2 \rightarrow R^2$ 為線性映射, $L(x, y) = (x + y, x - y)$, 證明 L 可逆。(10%)

6. Let $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -1 \\ -3 & 10 & -1 \\ -3 & -2 & 11 \end{bmatrix}$. Find a diagonal matrix D and an invertible

matrix C such that $C^{-1}AC = D$. (15%)

7. Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Find $\det(A)$, $\text{rank}(A)$ and the inverse of A if it exists.
(15%)

8. Let A be a symmetric $n \times n$ matrix. Let u and v be eigenvectors corresponding to two distinct eigenvalues of A , Show that u and v are orthogonal. (20%)