國立臺北教育大學 97 學年度學士班轉學考試

學系：數學暨資訊教育學系 （數學組）

年級：二年級

科目：線性代數

1. 若線性變換 $T_{\mathbf{A}}: R^6 \to R^4$ 為以 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ 來做乘法(multiplication by $\mathbf{A}$)，求
   (1) $T_{\mathbf{A}}$ 的秩(rank)維數。(5%)
   (2) $T_{\mathbf{A}}$ 的核(nullity)維數。(5%)
2. 考慮 R^3 的基底 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$，其中 $\mathbf{v}_1 = (1,2,1), \mathbf{v}_2 = (2,9,0), \mathbf{v}_3 = (3,3,4)$ 且若 $T: R^3 \to R^2$ 為使 $T(\mathbf{v}_1) = (1,0), \mathrm{T}(\mathbf{v}_2) = (-1,1), \mathrm{T}(\mathbf{v}_3) = (0,1)$ 的線性變換。
   (1) 試求 $T(x_1, x_2, x_3)$ 的表示式為何？(5%)
   (2) 並利用上一題(1)的線性變換表示式，試求 $T(1,1,1)$ 為何？(5%)
3. 試判定矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 是否為可對角化的(diagonalizable)，若矩陣 $\mathbf{A}$ 為可對角化，求對角化 $\mathbf{A}$ 的矩陣 $\mathbf{P}$，並求 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = ?$ (10%)
4. 假設 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 為向量空間 V 的一組基底。試證明若 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$、$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 與 $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$，則 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 亦為 V 的一組基底。(10%)
5. 下列何者為 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ 的線性組合？(10%)
   (1) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$
6. 令 N 是一個佈於 R 的 $n \times n$ 矩陣，已知 N 滿足：存在 $k \in N$ 使得 $N^k = 0$ 成立，試証 $I + N$ 可逆並求其反方陣 (10%)
7. 令 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. 試求 A^n，其中 n 為任意正整數. (10%)
8. 令 V 是一個佈於 F 的內積空間. 試証：對應任意 $x, y \in V$，$|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$ (10%)

9. 試求能將 $2x^2+4xy+5y^2=1$ 轉換成 $(x')^2+6(y')^2=1$ 的座標變換 (10%)

10. 令 $T: P_2(R) \to P_3(R)$ by $T(f)(x)=2f'(x)+\int_0^x 3f(t)dt$. 試求 T 的值域並證明 T 是一對一變換(10%)