國立臺北教育大學96學年度學士班轉學考試

學系：數學暨資訊教育學系　　二年級

科目：線性代數

1、 已知 W 爲 R^4 之一個子空間(subspace)，S={U_1，U_2，U_3}爲 W 之一組基底，其中 U_1=(1，-2，0，1)，U_2=(-1， 0，0，1)，U_3=(1，1，0，0)，試用 Gram-Schmidt 過程求 W 之一組 orthonormal (正交單位化)基底。 (15%)

2、 L 是一個線性轉換，定義如下：

L： $p_2 \to p_1$, p_i是t之i次之多項式(i=1或2), 已知 L(at^2+bt+c)=(a+2b)t+(b+c)

(1) 試問$(-4t^2+2t-2)\in\ker(L)$嗎? 爲什麼呢？ (5%)

(2) 試問$(t^2+2t+1)\in range(L)$嗎? 爲什麼呢？ (5%)

(3) 求 ker(L)之一組基底？ (5%)

(4) L 是 1-1 線性轉換嗎？ (5%)

(5) 求 range(L)之一組基底。 (5%)

3、 若 g(X)= $2x^2+2xy+2y^2=9$, 用主軸定理繪此函數圖形。 (10%)

4、 $R^{m\times n}$ 的下列子集合是否構成子空間(subspace)？ (10%)

(1) $W_1=\left\{A=(a_{ij})_{m\times n} \mid \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0\right\}$　　(2) $W_2=\left\{A=(a_{ij})_{m\times n} \mid \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1\right\}$

5、 $\{x,y\}$爲向量空間V之基底，試証$\{x+y,x-y\}$及$\{ax,by\}$亦爲V之基底，其中a、b均不爲 0。 (10%)

6、 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(1)求A特徵值(eigenvalues)與對應之特徵向量(eigenvectors)。 (2)求A^{50}。 (10%)

7、 若V爲佈於實數R所形成之多項式向量空間，試証$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt$爲$V$中的內積空間。 (10%)

8、 若W_1和W_2爲有限向量空間V之子空間，$\dim(V)=n$，試証若$\dim(W_1)>\frac{n}{2}$，$\dim(W_2)>\frac{n}{2}$，則$\dim(W_1\cap W_2)\geq 1$。 (10%)