

國立臺北教育大學 102 學年度碩士班招生入學考試
數學暨資訊教育學系數學教育碩士班 基礎數學 科試題

一、微積分：(每小題 10 分，共 50 分)

(一) Show that

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

is continuous but not differentiable at $x = 0$.

(二) Compute the limit by L'Hopital's rule

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$$

(三) Let $\{a_n\}$ be a sequence on \mathbb{R} . If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, show that

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow \alpha \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

(四) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

(五) 求極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

二、線性代數：(每小題 10 分，共 30 分)

(一) Find an orthogonal basis of the row space of

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(二) 令 $L: R^2 \rightarrow R^3$ 為線性轉換滿足

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

求 $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ 和 $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ 。

(三) 試寫出 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ 的特徵值與特徵向量。

三、普通數學：(每小題 10 分，共 20 分)

(一) 3005 位學生排成一行，從排頭到排尾分別以 1、2、3、4、5；1、2、3、4、5；……報數。然後從排尾到排頭分別以 1、2、3；1、2、3；……報數。請問有多少位學生在這二次報數中都報 1？

(二) 已知一袋子裝有 19 個球，其中紅色球有 7 個、白色球有 12 個。今從袋內取出一個球，如該球是紅色球，則放入袋內一個白球；如該球是白色球，則放入袋內一個紅色球。之後再從袋內取出第二個球。在取出第一個球是紅色球的條件下，取出的第二個球也是紅色球的機率是多少？