

國立臺北教育大學 103 學年度學士班轉學考試

學系 (組)：數學暨資訊教育學系 (數學組)

年 級：大二

科 目：微積分

1. (15%) 已知 $\sum_{k=1}^n ka_k = \frac{n+1}{n+2}$ ，對所有正整數 n 皆成立。請證明

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{3}{4}.$$

2. (15%) 請判斷下列級數和何者收斂、何者發散。

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^p}$, $p > 1$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!}$

3. (25%) 令 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 為一個二次可微的函數。假設 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in$

(a, b) 滿足 $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ 且 $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ 、 $f(\alpha_3) < f(\alpha_2)$ 。請

證明存在一點 $\beta \in (a, b)$ 使得 $f''(\beta) < 0$ 。

4. (20%) 請計算以下積分

(a) $\int \sec x dx$

(b) $\int_0^1 \log x \, dx$

5. (25%) 請計算下列橢球的體積

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$